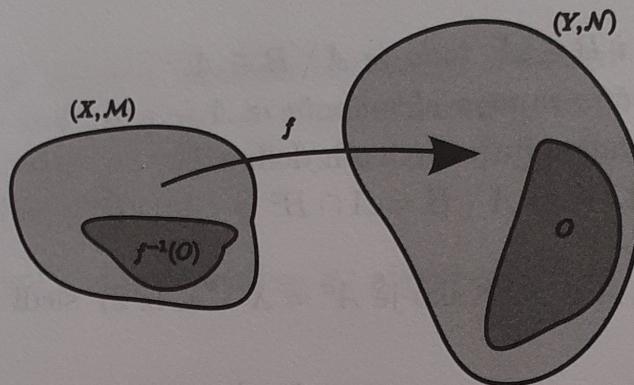


1.2 Merljive funkcije

Definicija 1.5. Neka je (X, \mathcal{M}) prostor sa σ -algebrom, (Y, τ) topološki prostor. Funkcija $f : X \rightarrow Y$, što ćemo označavati i sa $f : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \tau)$, je merljiva ako $f^{-1}(w) \in \mathcal{M}$ za svako $w \in \tau$. ▲

Sledeća definicija je česta u literaturi.

Definicija 1.6. Funkcija $f : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ ((Y, \mathcal{N})) je prostor sa σ -algebrom \mathcal{N} , je merljiva ako $f^{-1}(O) \in \mathcal{M}$ za svako $O \in \mathcal{N}$. ▲



Dijagram 1.1: Merljiva funkcija prema Definiciji 1.6 - tehniku povlačenja unazad.

Mi ćemo koristiti Definiciju 1.5 u daljem izlaganju.

Teorema 1.1. Neka je (X, \mathcal{M}) prostor sa σ -algebrom i neka su (Y, ν) i (Z, τ) topološki prostori. Ako je $f : (X, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \nu)$ merljiva, $g : (Y, \nu) \rightarrow (Z, \tau)$ neprekidna, tada je $g \circ f$ merljiva funkcija.

Dokaz: Neka je $O \in \tau$. Važi $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$. Iz neprekidnosti funkcije g sledi $g^{-1}(O) \in \nu$, te iz merljivosti f sledi $f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{M}$. ■

Primedba. Ako nije drugaćije navedeno, uvek ćemo prepostavljati da su skupovi realnih i kompleksnih brojeva \mathbf{R} i \mathbf{C} topološki prostori sa uobičajenim topologijama. Isto važi za \mathbf{R}^n i \mathbf{C}^n .

U sledećoj lemi, kao i nadalje, često ćemo se sretati sa predstavljanjem otvorenog intervala preko zatvorenih intervala i obratno, predstavljanja zatvorenog intervala preko otvorenih intervala. Važe sledeće relacije (videti i Dijagram 3.3):

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right),$$

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right].$$

Lema 1.2. Neka je (X, \mathcal{M}) prostor sa σ - algebrom i $f : X \rightarrow \mathbf{R}$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

- (i) f je merljiva.
 - (ii) Za svako $a \in \mathbf{R}$ je $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.
 - (iii) Za svako $a \in \mathbf{R}$ je $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$.
 - (iv) Za svako $a \in \mathbf{R}$ je $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$.
 - (v) Za svako $a \in \mathbf{R}$ je $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$.

Dokaz: Jasno, tvrđenja (ii) i (v) su ekvivalentna, jer su skupovi dati u njima međusobno komplementarni. Na isti način možemo zaključiti i da su tvrđenja (iii) i (iv) ekvivalentna.

Dokažimo sada ekvivalentnost (ii) i (iii). Neka važi (ii). Tada je

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) > a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}.$$

Slično, ako prepostavimo da važi (iii), tada (ii) sledi na osnovu osobina σ -algebre i relacije

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) \geq a + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}.$$

Dakle, uslovi (ii)–(v) su svi međusobno ekvivalentni.

Dakle, uslovi (ii)–(v) su svi međusobno ekvivalentni. Dokažimo sada na primer da je (i) ekvivalentno sa (ii). Prepostavimo da je funkcija f merljiva. Tada je $\{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{M}$, jer je $(a, +\infty)$ otvoren u \mathbf{R} . Obratno, neka su svi skupovi oblika kao u (ii) merljivi. Tada, na osnovu ekvivalentnosti uslova, merljivi su i skupovi oblika kao u (ii)–(v). Kako se svaki otvoren skup u \mathbf{R} može prikazati kao najviše prebrojiva unija otvorenih intervala $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ (a čije inverzne slike sve pripadaju \mathcal{M} , sledi da je f merljiva. ■

Opštiji oblik ove leme biće dat u Teoremi 1.5.

Teorema 1.2. Neka su $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbf{R}$ otvoreni skupovi, (X, \mathcal{M}) prostor sa σ -algebrrom i neka su $u : X \rightarrow \Omega_1$, $v : X \rightarrow \Omega_2$, merljive funkcije. Neka je $\phi : \Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ neprekidna funkcija. Tada je preslikavanje $F : X \rightarrow \mathbf{C}$, $x \mapsto F(x) = \phi(u(x), v(x))$ merljivo.

Dokaz: Neka je $f : X \rightarrow \Omega$ definisano sa $f(x) := (u(x), v(x))$. Tada važi $F = \phi \circ f$. Treba dokazati da je f merljiva. Tada na osnovu Teoreme 1.1 sledi da je F merljiva funkcija. Neka je $\Pi = (a, b) \times (c, d)$ proizvoljan (otvoreni)

pravougaonik u Ω . Važi $x \in f^{-1}(\Pi)$ ako i samo ako $(u(x), v(x)) \in (a, b) \times (c, d)$ što je ekvivalentno sa $x \in u^{-1}((a, b))$ i $x \in v^{-1}((c, d))$. Sledi

$$f^{-1}(\Pi) = u^{-1}((a, b)) \cap v^{-1}((c, d)) \in \mathcal{M},$$

zato što su u i v merljive pa je $u^{-1}((a, b)) \in \mathcal{M}$ i $v^{-1}((c, d)) \in \mathcal{M}$.

Svaki otvoren skup u \mathbf{R}^2 je prebrojiva unija otvorenih pravougaonika pa to važi i za svaki otvoren skup u Ω (po uslovu teoreme, Ω je otvoren). Dakle za otvoren skup O u Ω važi $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n$, te je

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\Pi_n) \in \mathcal{M}.$$

U Propozicijama 1.1–1.4 (X, \mathcal{M}) je prostor sa σ -algebrom.

Propozicija 1.1. Ako su $u, v : X \rightarrow \mathbf{R}$ merljive funkcije, tada su merljive sledeće funkcije $X \rightarrow \mathbf{R}$:

a) $x \mapsto u(x) \cdot v(x)$, $x \in X$.

Specijalno, $x \mapsto cv(x)$, $x \in X$, gde je $c \in \mathbf{R}$.

b) $x \mapsto u(x) + v(x)$, $x \in X$.

c) $x \mapsto u(x)/v(x)$, $x \in X$, ako je $v : X \rightarrow \mathbf{R}_+$.

Dokaz: Dokaz sledi primenom Teoreme 1.2, ako stavimo $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}$, a funkciju ϕ u slučajevima a), b), c) definišemo na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sa,

$$\phi(x, y) = xy; \quad \phi(x, y) = x + y; \quad \phi(x, y) = x/y, \quad y > 0.$$

Propozicija 1.2.

1. Ako je funkcija $f : X \rightarrow \mathbf{C}$, $f(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in X$ merljiva, tada su merljive i funkcije

a) $x \mapsto u(x)$; b) $x \mapsto v(x)$; c) $x \mapsto \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$, $x \in X$.

2. Ako su $u, v : X \rightarrow \mathbf{R}$ merljive funkcije, tada je merljiva funkcija $X \rightarrow \mathbf{C}$: $x \mapsto u(x) + iv(x)$.

$x \mapsto u(x) + iv(x)$.

Dokaz: 1. Funkcije:

$$a) z \mapsto \operatorname{Re}z; \quad b) z \mapsto \operatorname{Im}z; \quad c) z \mapsto |z|$$

su neprekidne. Primenom Teoreme 1.1 sledi dokaz.

2. Kao u Propoziciji 1.1, dokaz sledi primenom Teoreme 1.2 za funkciju $\phi(x, y) = x + iy, (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. ■

Iz prethodnog tvrđenja direktno sledi:

Posledica 1.1. Funkcija $f : X \rightarrow \mathbf{C}$, gde je $f(x) = u(x) + iv(x), x \in X$, je merljiva ako i samo ako su u i v merljive funkcije.

Propozicija 1.3. Ako su funkcije $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ i $g : X \rightarrow \mathbf{C}$ merljive, tada su merljive i funkcije $f + g$, $f \cdot g$, $\alpha \cdot f$, gde je α proizvoljan kompleksan broj.

Dokaz: Dokažimo samo da je αf merljiva, gde je $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, $f = u + iv$, u, v su realne funkcije. Ostala tvrđenja se slično dokazuju.

Kako $\alpha f = (\alpha_1 u - \alpha_2 v) + i(\alpha_2 u + \alpha_1 v)$, i kako su na osnovu Propozicije 1.2 realni i imaginarni delovi funkcije αf merljivi, sledi da je αf merljiva. ■

Propozicija 1.4. Neka je $A \in \mathcal{P}(X)$ i $\kappa_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$ karakteristična funkcija skupa A . Funkcija κ_A je merljiva ako i samo ako $A \in \mathcal{M}$.

Dokaz: Neka je $A \in \mathcal{M}$. Neka je O otvoren skup u \mathbf{R} . Kako je

$$\kappa_A^{-1}(O) = \begin{cases} \emptyset, & 0, 1 \notin O, \\ X, & 0, 1 \in O, \\ A, & 1 \in O, 0 \notin O, \\ A^c, & 1 \notin O, 0 \in O, \end{cases}$$

i $\emptyset, X, A, A^c \in \mathcal{M}$, sledi da je κ_A je merljiva.

Obratno, ako je κ_A merljiva, znamo da za otvoren skup $O \in \tau$ važi $\kappa_A^{-1}(O) \in \mathcal{M}$, pa je $A = \kappa_A^{-1}((0, \infty)) \in \mathcal{M}$. ■

Primedba. Označimo sa $\bar{\mathbf{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ dvotačastu kompaktifikaciju realne prave i uvedimo uobičajenu topologiju preko familije okolina.

Familija okolina tačke ∞ je $\mathcal{V}_\infty = \{V \subseteq \bar{\mathbf{R}}; V \supseteq (a, \infty], \text{ za neko } a \in \mathbf{R}\}$.

Na sličan način se definiše $\mathcal{V}_{-\infty}$.

Navedene familije okolina tačaka $\infty, -\infty$ kao i uobičajene familije okolina tačaka iz \mathbf{R} definišu uobičajenu topologiju proširene prave $[-\infty, \infty] = \bar{\mathbf{R}}$.

Osobine merljivih funkcija sa vrednostima u \mathbf{R} se jednostavno prenose na merljive funkcije sa vrednostima u $\bar{\mathbf{R}}$.

1.4 Nizovi merljivih funkcija

Podsetimo se: Neka je $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz u $[-\infty, \infty]$. Tada je

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} a_k), \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} a_k).$$

Neka je $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. To je monotono nerastući niz. Za niz $\tilde{b}_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$ važi da je monotono neopadajući niz. Dakle, za proizvoljan niz u $[-\infty, \infty]$ uvek postoji limes superior i limes inferior u $[-\infty, \infty]$.

Za skupove uvodimo definicije:

Definicija 1.8. Ako $A_k \in \mathcal{P}(X)$, $k \in \mathbb{N}$ tada je

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$



Dakle, $x \in \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k$ ako je $x \in \bigcup_{k \geq n} A_k$ za svaki prirodan broj n , odnosno ako se x nalazi u beskonačno mnogo skupova A_k .

Slično, $x \in \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k$ ako je bar u jednom od $\bigcap_{k \geq n} A_k$, što znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $x \in A_k$ za svako $k \geq n$ odnosno x se nalazi u svim sem u konačno mnogo skupova A_k .

U sledećoj teoremi i propozicijama 1.7 i 1.8 prepostavljamo da je (X, \mathcal{M}) prostor sa σ -algebrom.

Teorema 1.6. Neka je $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz merljivih funkcija $f_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Tada su sledeće funkcije merljive:

- 1) $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = f(x)$, $x \in X$;
- 2) $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = \tilde{f}(x)$, $x \in X$;
- 3) $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \tilde{\tilde{f}}(x)$, $x \in X$;
- 4) $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \tilde{\tilde{\tilde{f}}}(x)$, $x \in X$.

Dokaz: 1) Pokažimo da je $x \mapsto f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$, $x \in X$ merljiva. Treba pokazati da je $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}$, pa će na osnovu Teoreme 1.5 c) slediti da je f merljiva funkcija.

Pokažimo da su $A = \{x \in X; f(x) > a\}$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X; f_k(x) > a\}$ jednaki skupovi. Jasno, $B \subseteq A$. Ako bi za svako k važilo $f_k(x) \leq a$, sledilo bi $f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \leq a$. Sledi, $X \setminus B \subseteq X \setminus A$ odnosno $A \subseteq B$, te je $A = B$. Kako je B merljiv skup, merljiv je i A .

2) Važi

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) = -\sup_{k \in \mathbb{N}} (-f_k(x)),$$

pa je i $x \mapsto -\sup_{k \in \mathbb{N}} (-f_k(x)) = \tilde{f}(x)$ merljiva funkcija.

3) Pokažimo merljivost funkcije $\tilde{\tilde{f}}$. Važi

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k(x), \quad x \in X.$$

Stavimo $g_n(x) = \sup_{k \geq n} f_k(x)$, $x \in X$. Na osnovu 1) g_n su merljive funkcije, a na

osnovu 2) $\inf_{n \in \mathbb{N}} g_n$ je merljiva funkcija, te je $\tilde{\tilde{f}}$ merljiva funkcija.

4) Tvrđenje se dokazuje kao u 3) jer

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

Iz prethodne teoreme sledi čitav niz važnih posledica.

Propozicija 1.7. Ako su $f_k : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ merljive funkcije i ako je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in X,$$

tada je f merljiva.

Dokaz: Ako limes postoji, tada iz

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x),$$

i Teoreme 1.6 pod 3) i 4) sledi da je granična funkcija merljiva. ■

Primetimo da je merljiva funkcija koncept koji je vrlo sličan neprekidnim funkcijama tj. da radi sa merljivim skupovima isto što i neprekidna funkcija radi sa otvorenim skupovima, naime vraća ih unazad tako da inverzne slike ponovo čine merljiv, respektivno otvoren skup (ova osobina da je inverzna slika "dobrog" skupa "dober" skup se u literaturi često naziva i kao *pull-back* tj. povlačenje unazad). Međutim, za razliku od neprekidnih funkcija, čija klasa nije zatvorena u odnosu na puštanje granične vrednosti po tačkama, granična vrednost merljivih funkcija je uvek merljiva funkcija.

Definicija 1.9. Za funkciju $f : X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ definišemo njen pozitivan i negativan deo sa

$$f_+(x) = \sup\{f(x), 0\} = \max\{f(x), 0\}, \quad x \in X,$$

$$f_-(x) = -\inf\{f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \sup\{-f(x), 0\}, \quad x \in X.$$



Propozicija 1.8.

Ako su f i g merljive na σ -algebri (X, \mathcal{M}) , tada su merljive i sledeće funkcije: $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$, f_+ , f_- .

Dokaz: Važi

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} f_i = \max\{f, g\}$$

gde je $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_3 = f_4 = f_5 = \dots = -\infty$. Primenjujemo prethodno tvrđenje i sledi da je funkcija $\max\{f, g\}$ merljiva. Slično se pokazuje za $\min\{f, g\}$, pa na osnovu toga i za f_+ i f_- . ■

1.5 Nenegativna merljiva funkcija kao granica niza nenegativnih jednostavnih funkcija

Definicija 1.10. Funkcija $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ je jednostavna, ako je kodomen konačan skup, odnosno ako postoji $a_1, \dots, a_r \in [-\infty, \infty]$ tako da za svako $x \in X$ važi $f(x) \in \{a_1, \dots, a_r\}$.



Stavimo $A_i = \{x \in X; f(x) = a_i\}$, $i = 1, \dots, r$. Važi $\bigcup_{i=1}^r A_i = X$ i skupovi A_i , $i = 1, \dots, r$, čine particiju skupa X .

Ako $a_1, \dots, a_r \in \mathbf{R}$, tada je $f(x) = \sum_{i=1}^r a_i \kappa_{A_i}(x)$, $x \in X$, gde je κ_{A_i} karakteristična funkcija skupa A_i .

Propozicija 1.9. Neka je (X, \mathcal{M}) prostor sa σ -algebrom i neka su a_1, \dots, a_r realni brojevi. Jednostavna funkcija $f(x) = \sum_{i=1}^r a_i \kappa_{A_i}(x)$, $x \in X$ je merljiva ako i samo ako su A_i , $i = 1, \dots, r$ merljivi.

Dokaz: Kako je $\{a_1, \dots, a_r\}$ diskretan skup, za svako a_i postoji otvoren interval I_i tako da važi $I_i \ni a_i$ i $I_i \cap I_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Neka je f merljiva. Iz $f^{-1}(I_i) = A_i$ sledi da su A_i merljivi, $i = 1, \dots, r$.

Ako su A_i merljivi, tada su κ_{A_i} merljive funkcije (Propozicija 1.4) i f je merljiva kao konačan zbir merljivih funkcija. ■

Teorema 1.7. Neka je $f : X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva funkcija na (X, \mathcal{M}) . Tada postoji niz nenegativnih jednostavnih merljivih funkcija $\{s_n : n \in \mathbf{N}\}$ na X tako da važi

$$s_n(x) \leq s_{n+1}(x), \quad x \in X, n \in \mathbf{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x), \quad x \in X.$$

Dokaz: Neka $i, n \in \mathbf{N}$ i $1 \leq i \leq n \cdot 2^n$. Definišemo

$$E_{n,i} := f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right), \quad F_n = f^{-1}([n, \infty]).$$

Skupovi $E_{n,i} \subseteq X$ $i = 1, \dots, n \cdot 2^n$, F_n su elementi σ -algebре \mathcal{M} jer su inverzne slike intervala. Definišimo

$$s_n(x) := \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} \kappa_{E_{n,i}}(x) + n \cdot \kappa_{F_n}(x), \quad x \in X.$$

Za svako $n \in \mathbf{N}$ funkcija s_n je nenegativna i ima konačno mnogo vrednosti. Jednostavno se pokazuje da su skupovi $E_{n,i}$ $i = 1, \dots, n \cdot 2^n$ i F_n disjunktni jer važi

$$f(E_{n,i}) \subseteq \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), \quad i = 1, \dots, n \cdot 2^n, \quad f(F_n) \subseteq [n, \infty].$$

Takođe važi

$$f(x) - \frac{i-1}{2^n} \kappa_{E_{n,i}}(x) \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{za } x \in E_{n,i}.$$

Ako $x \in X$ i $f(x) \in [0, n_0)$, za neko $n_0 \in \mathbf{N}$, tada $f(x) \in [0, n)$ za svako $n \geq n_0$, te je

$$f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n} \quad \text{odnosno} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x).$$

Ako je $f(x) = \infty$, tada je $s_n(x) = n$, $n \in \mathbf{N}$, te $s_n(x) \rightarrow f(x)$, $n \rightarrow \infty$.

Dokažimo da je niz $s_n, n \in \mathbf{N}$, monotono neopadajući. Ako za $x \in X$ važi

$f(x) = \infty$, to je očigledno.

Pretpostavimo da je $f(x) < \infty$. Neka $x \in E_{n,i_0}$. Važi $s_n(x) = \frac{i_0-1}{2^n}$. Odredimo $s_{n+1}(x)$. Kako je

$$\left[\frac{i_0-1}{2^n}, \frac{i_0}{2^n}\right) = \left[\frac{2i_0-2}{2^{n+1}}, \frac{2i_0-1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2i_0-1}{2^{n+1}}, \frac{2i_0}{2^{n+1}}\right)$$

sledi da $x \in E_{n+1,2i_0-1}$ ili $x \in E_{n+1,2i_0}$ tj.

$$x \in f^{-1}\left(\left[\frac{2(i_0-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i_0-1}{2^{n+1}}\right)\right) \text{ ili } x \in f^{-1}\left(\left[\frac{2i_0-1}{2^{n+1}}, \frac{2i_0}{2^{n+1}}\right)\right),$$

te je

$$s_{n+1}(x) = \frac{2(i_0-1)}{2^{n+1}} \text{ ili } s_{n+1}(x) = \frac{2i_0-1}{2^{n+1}}.$$

U oba slučaja važi $s_{n+1}(x) \geq s_n(x)$.

Ako $x \in F_n$, tada je $s_n = n$. Važi da je

$$f(x) \in [n, n+1] \text{ ili } f(x) \geq n+1.$$

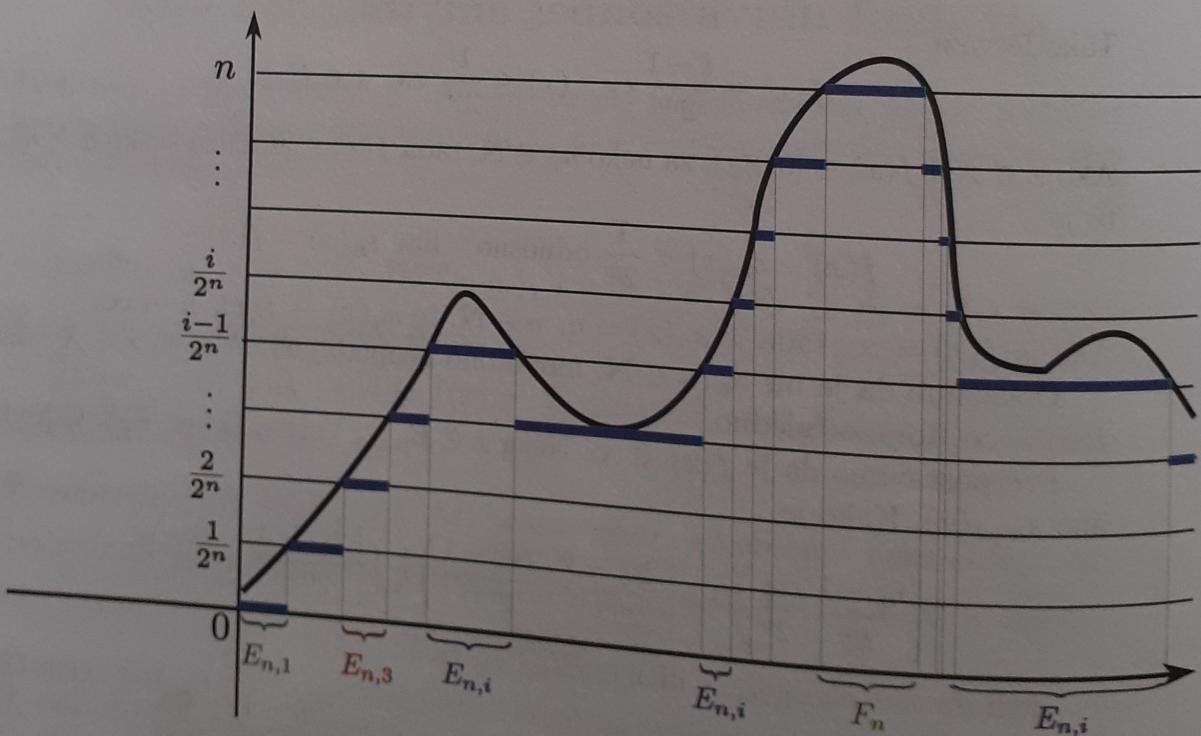
Za $f(x) \geq n+1$ je $s_{n+1}(x) = n+1$, te je $s_{n+1}(x) \geq s_n(x)$. Za $f(x) \in [n, n+1]$ pokažimo da je $n \leq s_{n+1}(x) < n+1$. Kako

$$f(x) \in [n, n+1] = \bigcup_{j \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1}\}} \left[\frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{j}{2^{n+1}} \right)$$

sledi

$$s_{n+1}(x) = \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{j-1}{2^{n+1}} \quad \text{za neko } j \in \{1, 2, \dots, 2^{n+1}\}.$$

Dakle, $s_{n+1}(x) \in [n, n+1]$. Time je dokazano da je niz $s_n, n \in \mathbf{N}$, monotono neopadajući.



Dijagram 1.3: Aproksimacija merljive funkcije jednostavnom funkcijom.